Institut National Polytechnique de Lorraine

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE - NANCY -

EPREUVE DE MATHEMATIQUES - SESSION 1994 -

On pourra admettre un résultat afin de poursuivre, en le signalant explicitement. Les parties I et II sont indépendantes, la partie III utilise les parties I et II. Compte tenu de la nature du sujet, on soignera particulièrement la présentation.

Dans tout le problème, h et ℓ sont deux nombres strictement positifs ; $(u_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite réelle bornée par le nombre positif M tel que : $M\frac{h}{\ell} < \frac{1}{2}$.

On étudie la relation de récurrence

$$(1)\qquad u_n^{k+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k\right) - \frac{h}{2\ell}\left(\left(u_{n+1}^k\right)^2 - \left(u_{n-1}^k\right)^2\right)$$

pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Partie I

[1] Expliquer pourquoi, si $(n-k)$ est pair, u_n^k est déterminé par une partie finie de $\{u_m^0 / m \text{ pair}\}$ *(on pourra s'aider d'une figure)*.

[2] 1) Mettre la relation (1) sous la forme

$$(2)\qquad u_n^{k+1} = a_{n,n-1}^{k+1,k} \cdot u_{n-1}^k + a_{n,n+1}^{k+1,k} \cdot u_{n+1}^k$$

où $a_{n,n-1}^{k+1,k} + a_{n,n+1}^{k+1,k} = 1$. (On introduira $\theta_n^k = u_{n-1}^k + u_{n+1}^k$).

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée par M.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose : $z_n^k = \frac{1}{2\ell}\left(u_n^k - u_{n-2}^k\right)$.

[3] 1) Etablir la relation

$$z_n^{k+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{\ell}u_{n-1}^k\right)z_{n-1}^k + \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{\ell}u_{n-1}^k\right)z_{n+1}^k - h\left(\left(z_{n-1}^k\right)^2 + \left(z_{n+1}^k\right)^2\right)$$

2) Montrer que, si $\tilde{z}_n^k = \max(z_{n-1}^k, z_{n+1}^k, 0)$, on a

$$z_n^{k+1} \le \tilde{z}_n^k - h(\tilde{z}_n^k)^2.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose : $Z_k = \max(\sup_n z_n^k, 0)$.

[4] 1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k \le \frac{M}{\ell}$.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_{k+1} \le Z_k - h(Z_k)^2$.

[5] On dit d'une fonction Z réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, qu'elle est convexe si $Z'' \ge 0$ sur I. Montrer que : $\forall t \in I, \forall h \in \mathbb{R}$ avec $t+h \in I$, on a : $Z(t+h) \ge Z(t)+h.Z'(t)$ et donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

[6] 1) Déterminer Z telle que : $Z' = -Z^2$ et $Z(0) = \frac{M}{\ell}$, et dessiner son graphe.

2) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, Z_k \le \frac{1}{kh}$.

Dans la suite, X et δ désignent deux nombres strictement positifs.

[7] 1) Montrer qu'il existe un nombre positif C tel que, si on pose $v_n^k = u_n^k - C.n\ell$ on ait, pour $k \ge \frac{\delta}{h}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $v_{n+2}^k - v_n^k \le 0$.

2) Montrer qu'il existe un nombre positif K (*qui dépend de* X, δ *et* M) *tel que, si* $k \ge \frac{\delta}{h}$, on ait

$$\sum_{n\ge -\frac{X}{\ell}}^{n\le\frac{X}{\ell}} \left|u_{n+2}^k - u_n^k\right| \le K.$$

Partie II

Sur l'espace de probabilité (Ω,A,P), on considère la suite $(X_j)_{j\ge1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans l'ensemble $\{-1,+1\}$, de même loi donnée par

$$P(\{X = -1\}) = q$$

où q est donné dans l'intervalle $]0,1[$. On lui associe la suite $(\xi_k)_{k\ge0}$ définie par

$$\xi_0 = 0$$

$$\xi_k = \ell . \sum_{j=1}^{k} X_j \text{ si } k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $k \geq p \geq 0$ entiers, n et $j \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\alpha_{n,j}^{k,p} = P(\{\xi_{k-p} = (j-n).\ell\}) .$$

[1] Calculer l'espérance et la variance de ξ_k.

[2] 1) Que valent : $\alpha_{n,j}^{k,k}$? $\alpha_{n,j}^{k,p}$ pour $|n-j| > k-p$?

$\alpha_{n,j}^{k,p}$ pour (k-p) pair et (n-j) impair ?

2) Etablir la relation

$$\alpha_{n,j}^{k,p} = q.\alpha_{n,j+1}^{k,p+1} + (1-q)\,\alpha_{n,j-1}^{k,p+1} .$$

Pour $m > n-(k-p)$, on pose $P_{n,m}^{k,p} = \sum_{j=n-(k-p)}^{j=m} \alpha_{n,j}^{k,p}$.

[3] Etablir pour $k > p > 0$, la relation

$$P_{n,m}^{k,p} = q.P_{n,m+1}^{k,p+1} + (1-q)\,P_{n,m-1}^{k,p+1}$$

[4] Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que, si $(m-n)\ell \leq \ell(1-2q)(k-p)-\varepsilon$ on a :

$$P_{n,m}^{k,p} \leq \frac{4\ell^2}{\varepsilon^2}\,(k-p).q.(1-q)$$

Partie III

Dans la suite du problème, $k \geq p \geq 0$ avec $k,p \in \mathbb{N}$ et (k-p) pair ; X et δ désignent toujours deux nombres strictement positifs.

[1] 1) Montrer qu'il existe une relation de la forme

$$u_n^k = \sum_{j=n-(k-p)}^{j=n+(k-p)} a_{n,j}^{k,p} . u_j^p , \forall n \in \mathbb{Z}$$

où $a_{n,j}^{k,p} > 0$ et $\sum_{j=n-(k-p)}^{j=n+(k-p)} a_{n,j}^{k,p} = 1.$

2) Expliquer pourquoi on a le même résultat, pour une sommation étendue aux indices j tels que (n-j) soit pair.

[2] En déduire que

$$\sum_{\substack{|n|\leq \frac{X}{\ell} \\ (n-k)\text{pair}}} |u_n^k - u_n^p| \leq \sum_{\substack{|n|\leq \frac{X}{\ell} \\ (n-k)\text{pair}}} \sum_{r=n-(k-p)}^{r=n+(k-p)} |u_{r+2}^p - u_r^p|$$

[3] Montrer qu'il existe un nombre positif L (qui dépend de X, δ, M) tel que, pour $k > p \geq \frac{\delta}{h}$ et $h > \delta.\ell$, on ait

$$\sum_{\substack{|n|\leq \frac{X}{\ell} \\ (n-k)\text{pair}}} 2\ell\, |u_n^k - u_n^p| \leq L.(k-p).h$$

Pour m compris entre n-(k-p) et n+(k-p), on pose

$$Q_{n,m}^{k,p} = \sum_{\substack{j=n-(k-p) \\ (j-n)\text{pair}}}^{j=m} a_{n,j}^{k,p}$$

[4] Etablir la relation

$$Q_{n,m}^{k,p} = a_{m+1,n}^{p+1,p}\, Q_{n,m+1}^{k,p+1} + a_{m-1,n}^{p+1,p}\, Q_{n,m-1}^{k,p+1}$$

On pose

$$\underline{q} = \frac{1}{2}\left(1 - 2M\,\frac{h}{\ell}\right) \text{ et } \overline{q} = \frac{1}{2}\left(1 + 2M\,\frac{h}{\ell}\right)$$

et on désigne par $\underline{P}_{n,m}^{k,p}$ et $\overline{P}_{n,m}^{k,p}$ les expressions définies en II) pour $q = \underline{q}$ et $q = \overline{q}$.

[5] Montrer que $\underline{P}_{n,m}^{k,p} \leq Q_{n,m}^{k,p} \leq \overline{P}_{n,m}^{k,p}$.

[6] En prenant $\varepsilon = [(k-p)h]^{\frac{1}{3}}$ dans II) [4] , montrer qu'il existe un nombre positif L_1 tel que, si $\ell^2 \leq h$, on ait

$$\sum_{\substack{|n|\leq \frac{X}{\ell} \\ (n-k)\text{pair}}} 2\ell\, |u_n^k - u_n^p| \leq L_1((k-p)h)^{\frac{1}{3}}$$